有限加法的測度と極大フィルター

国定　亮一

1　序言

以前の論文［4］において有限加法的測度の加法性という可算加法性と有限加法性の中間的な加法的性質を紹介し，これが有限加法的測度に対してそれぞれ L^{p}–空間の完備性，Radon-Nikodym の定理，Hahn の分解定理が成立することと同値であることを述べた．また特に有限加法的測度の加算和が加法性を持つための必要十分条件を与えた．本論文においてはその結果の一つの応用を与える．まずは以下に加法性の定義を述べる．この性質に関する詳細は［1］または［4］を参照してほしい．

定義 1.1. $(X, \mathcal{F}, \mu)$を有限加法的測度空間とし，$\mathcal{F}$はσ-加法族であるとする．μが加法性を満たすとは次の性質が成り立つことをいう．$\mathcal{F}$の増大列$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$が与えられたとき，次の二つの条件を満たす$B \in \mathcal{F}$が存在する．

(1)　$\mu(B) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i)$,
(2)　$\mu(A_i \setminus B) = 0$がすべての$i = 1, 2, \ldots$に対して成立する．

有限加法的測度の例としてよく知られているのが整数論などで馴染みが深い漸近密度である．$\mathcal{P}(\mathbb{N})$を自然数の集合$\mathbb{N}$の部分集合全体のなす集合とする．また$X \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$に対して$|X|$でその濃度を表すとする．$A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$に対して次の極限$d(A)$が存在するとき$A$の漸近密度と呼ばれる．

$$d(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{|A \cap [1, n]|}{n}.$$

漸近密度が存在するような$A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$全体のなす集合を$\mathcal{D}$とおく．このとき集合関数$d : \mathcal{D} \to$［0, 1］は$\mathcal{D}$上で有限加法的である．しかし$\mathcal{D}$は和で閉じていないため，$d$を有限加法的測度と見なすためにはその定義域を$\mathcal{D}$のある有限加法族をなす部分集合族上へと制限するか，あるいはdを

$\mathcal{D}$を含む有限加法族上へと拡張する必要がある．例えば漸近密度に対する前者の立場からの研究としては［2］が挙げられる．後者の試みとして，特にdを$\mathcal{P}(\mathbb{N})$全体の上へと拡張した有限加法的測度を密度測度と呼び，Maharam（[5]）以来多くの研究がなされている．密度測度は定義域がσ-加法族になるため理論的な取り扱いが簡単になるという利点がある．このような有限加法的測度を構成するには本質的に選択公理が必要であり，特によく用いられるのが$\mathbb{N}$上の極大フィルターを用いた次の構成である．$\mathcal{U}$を$\mathbb{N}$上の任意の非自明な極大フィルター（その元すべての交わりが空集合になっている極大フィルター）とする．$\mathcal{P}(\mathbb{N})$上の有限加法的測度$\nu_{\mathcal{U}}$を次で定義する．

$$\nu_{\mathcal{U}}(A) = \mathcal{U}\text{-}\lim_{n} \frac{|A \cap [1, n]|}{n}, \quad A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}).$$

ここで$\mathcal{U}\text{-}\lim$は極大フィルター$\mathcal{U}$に関する極限を表すとする．筆者は［3］においてこのような密度測度が加法性を満たすための必要十分条件を与えた．本論文ではこのような密度測度を一般化して得られる有限加法的測度のクラスを導入し，それらが加法性を持つための条件について考察する．

2 準備

さて以下では議論の便宜上，上で定義した密度測度の連続変数版を考える．両者の間には本質的な違いはないといってよい．$\mathbb{R}_+^\times = [1, \infty)$とおき，$\mathbb{R}_+^\times$上の可測集合全体のなす集合を$\mathcal{M}(\mathbb{R}_+^\times)$で表す．$\mathbb{R}$上の Lebesgue 測度を$m$で表すとする．$\mathcal{U}$を$\mathbb{R}_+^\times$上の極大フィルターで有界集合を含まないものとする．このとき$\mathcal{M}(\mathbb{R}_+^\times)$上の有限加法的測度$\nu_{\mathcal{U}}$を次で定義する．

$$\nu_{\mathcal{U}}(A) = \mathcal{U}\text{-}\lim_{x} \frac{m(A \cap [1, x])}{x}, \quad A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}_+^\times).$$

これは$A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}_+^\times)$の特性関数を$I_A$で表すとしたとき，次のように表現される．

$$\nu_{\mathcal{U}}(A) = \mathcal{U}\text{-}\lim_{x} \frac{1}{x} \int_1^x I_A(t)dt = \mathcal{U}\text{-}\lim_{x} \int_1^x I_A(t)(x/t)^{-1} \frac{dt}{t}.$$

したがってこれの自然な一般化として次を考えることができる．$L^1(\mathbb{R}_+^\times)$を$\mathbb{R}_+^\times$上の測度dx/xに対する可積分関数全体のなす空間とする．なお，dx/xは実数体$\mathbb{R}$の正の乗法群$\mathbb{R}^\times = (0, \infty)$上の Haar 測度であり，したがって$L^1(\mathbb{R}_+^\times)$は$\mathbb{R}^\times$上の群環$L^1(\mathbb{R}^\times)$を$\mathbb{R}_+^\times$上に制限したものである．今任意の$f \in L^1(\mathbb{R}_+^\times)$で$f \geq 0$なるもの及び$\mathbb{R}_+^\times$上の有界集合を含まない極大フィルター$\mathcal{U}$に対して，$\mathcal{M}(\mathbb{R}_+^\times)$上の有限加法的測度$\lambda_{\mathcal{U}} : \mathcal{M}(\mathbb{R}_+^\times) \to [0, \infty)$を次のように定義する．

$$\lambda_{\mathcal{U}}(A) = \mathcal{U}\text{-}\lim_{x} \int_1^x I_A(t) f(x/t) \frac{dt}{t}, \quad A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}_+^\times).$$

これを$t=e^s$と変数変換すると

$$\begin{aligned}\mathcal{U}\text{-}\lim_x \int_1^x I_A(t)f(x/t)\frac{dt}{t} &= \mathcal{U}\text{-}\lim_x \int_0^{\log x} I_A(e^s)f(x/e^s)ds\\ &= \log\mathcal{U}\text{-}\lim_x \int_0^x I_A(e^s)f(e^{x-s})ds\\ &= \log\mathcal{U}\text{-}\lim_x \int_0^x I_B(x)g(x-s)ds\end{aligned}$$

を得る．ここで$B=\{\log x : x\in A\}$及び$g(x)=f(e^x)$とおいた．また$\log\mathcal{U}$は$\log X=\{\log x : x\in X\}$, $X\in\mathcal{U}$全体からなる$\mathbb{R}_+=[0,\infty)$上の極大フィルターである．また$\mathcal{U}$は有界集合を含まないとしたから，定義より$\log\mathcal{U}$も同様である．さて以上の考察により$\mathbb{R}_+$上の有限加法的測度のクラスとして次のものを導入する．$\mathcal{M}(\mathbb{R}_+)$を$\mathbb{R}_+$上の可測集合全体のなす集合とし，$\mathbb{R}_+$上のLebesgue可積分関数全体のなす空間を$L^1(\mathbb{R}_+)$とする．今任意の$f\in L^1(\mathbb{R}_+)$で$f\geq 0$なるもの及び$\mathbb{R}_+$上の有界集合を含まない極大フィルター$\mathcal{U}$に対して有限加法的測度$\mu_{\mathcal{U}}:\mathcal{M}(\mathbb{R}_+)\to[0,\infty)$を

$$\mu_{\mathcal{U}}(A)=\mathcal{U}\text{-}\lim_x \int_0^x I_A(t)f(x-t)dt,\quad A\in\mathcal{M}(\mathbb{R}_+)$$

と定義する．ここで次のことは変数変換により容易に確かめることができる．$\lambda_{\mathcal{U}}$が加法性を持つことと$\mu_{\mathcal{U}}$が加法性を持つことは同値である．したがってどちらか一方を研究すれば十分であるため，以下では後者のみを扱う．以下ではこの有限加法的測度のクラスに対して加法性が成立するための条件を考察する．

3　極大フィルターのなす空間とその上の連続な流れ

$\mu_{\mathcal{U}}$の定義において有界集合を含まない任意の$\mathbb{R}_+$上の極大フィルター$\mathcal{U}$に関する極限を考えたが，実際はもっと小さい極大フィルターの集合を考えても十分であることを示す．$\mathbb{R}_+$上の有界一様連続関数全体のなす空間を$C_{ub}(\mathbb{R}_+)$とおく．これはGelfand-Naimarkの定理によりその極大イデアル空間上の連続関数環と同型になる．$C_{ub}(\mathbb{R}_+)$の極大イデアル空間は次のように構成される．

以下，非負整数の集合$\mathbb{N}_0$上の極大フィルター全体のなす集合を$\mathbb{N}_0$のStone-Čechのコンパクト化$\beta\mathbb{N}_0$と同一視する．$\beta\mathbb{N}_0$の開集合族の基底は開閉集合の全体であり，それは各$A\subseteq\mathbb{N}_0$に対して$\hat{A}=\{\mathcal{U}\in\beta\mathbb{N}_0 : A\in\mathcal{U}\}$なる集合の全体である．また$\mathbb{N}_0$上の非自明な極大フィルター全体の集合$\beta\mathbb{N}_0\setminus\mathbb{N}_0$を$\mathbb{N}_0^*$とおき，各$A\subseteq\mathbb{N}_0$に対して$A^*=\hat{A}\cap\mathbb{N}_0^*$とおくと同様にしてそのような集合全体は$\mathbb{N}_0^*$の開集合族の基底をなす．直積位相空間$\beta\mathbb{N}_0\times[0,1]$上に任意の$\eta\in\beta\mathbb{N}_0$に対して$(\tau\eta,0)\sim(\eta,1)$で定義される同値関係を考える．この同値関係による商空間を$\Omega=(\beta\mathbb{N}_0\times[0,1])/\sim$とおく．このとき$\Omega$は$C_{ub}(\mathbb{R}_+)$の極大イデアル空間と同相である．

さらに$\{(n,\theta) : n \in \mathbb{N}_0, \theta \in [0,1]\}$を$\mathbb{R}_+$と同一視すれば$\Omega$は$\mathbb{R}_+$のコンパクト化になっており，$\phi \in C_{ub}(\mathbb{R}_+)$の Gelfand 表現$\overline{\phi}$は$\phi$の$\Omega$上への連続な拡張で与えられる．それは極大フィルターによる極限を使って次のように表現することができる．Ωの各点$\omega = (\eta, \theta)$を$\{\theta + A : A \in \eta\}$によって定義される$\mathbb{R}_+$上の極大フィルターと同一視する．このとき

$$\overline{\phi}(\omega) = \omega\text{-}\lim_{x} \phi(x)$$

が成立する（以上の結果に関して詳しくは［3］を参照）．特に$\Omega^* = \Omega \setminus \mathbb{R}_+$とおくと，$\Omega^*$における$\overline{\phi}$の値が$x \to \infty$における$\phi(x)$の挙動を表すことになる．

今$L^1(\mathbb{R}_+)$の元fと$L^\infty(\mathbb{R}_+)$の元ϕに対して$U_f\phi$を

$$(U_f\phi)(x) = \int_0^x \phi(t)f(x-t)dt, \quad x \geq 0$$

で定義すると，$(U_f\phi)(x) \in C_{ub}(\mathbb{R}_+)$が成立する．これと上記の議論により，任意の有界集合を含まない$\mathbb{R}_+$上の極大フィルター$\mathcal{U}$に対して，ある$\omega \in \Omega^*$が存在して$\mu_{\mathcal{U}} = \mu_\omega$が成立することが分かる．すなわち$\mu_{\mathcal{U}}$のように表現される有限加法的測度の考察においては，単純な極大フィルターであるΩ^*の元ωで定義されるものμ_ωのみを考えれば十分である．

次にΩ^*上の連続な流れを定義する．はじめに$\mathbb{N}_0^*$上の位相力学系を定義して，それを自然な方法でΩ^*上の連続な流れに持ち上げる．まずは写像

$$\tau_0 : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0, \quad \tau_0(n) = n+1$$

を考え，これを$\beta\mathbb{N}_0$上へと連続に拡張した写像をτとおく．このτを$\mathbb{N}_0^*$上へと制限すると$\tau : \mathbb{N}_0^* \to \mathbb{N}_0^*$は同相写像になっており，特に組$(\mathbb{N}_0^*, \tau)$は位相力学系になっている．次にこれを用いて$\Omega^*$上の同相写像の族$\{\tau^s\}_{s\in\mathbb{R}}$を

$$\tau^s\omega = \tau^s(\eta,\theta) = (\tau^{[\theta+s]}\eta, \theta + s - [\theta+s]) \quad (s \in \mathbb{R})$$

で定義する．こうして連続な流れ$(\Omega^*, \{\tau^s\}_{s\in\mathbb{R}})$が得られた．

$\mathcal{R}_{d,-}$を力学系$(\mathbb{N}_0^*, \tau)$に関して負の軌道が再帰的な点全体のなす$\mathbb{N}_0^*$の部分集合とする．ここで$\eta \in \mathbb{N}_0^*$の負の軌道が再帰的であるとはηの任意の近傍Uと正整数Nに対してある$n \geq N$で$\tau_0^{-n}\eta \in U$を満たすものが存在することをいう．

同様にして連続な流れ$(\Omega^*, \{\tau\}_{s\in\mathbb{R}})$に対しても，$\mathcal{R}_-$を負の軌道が再帰的である$\Omega^*$の点全体のなす集合を表すとする．ここで$\omega \in \Omega^*$の負の軌道が再帰的であるとは，$\omega$の任意の近傍$U$と任意

の正の実数Rに対してある$s \geq R$で$\tau^{-s}\omega \in U$を満たすものが存在することをいう．

最後に次のことには定義より明らかである．$\omega = (\eta, \theta) \in \Omega^*$に対して$\omega \in \mathcal{R}_-$が成立することと$\eta \in \mathcal{R}_{d,-}$が成立することは同値である．

4 主結果

この節ではこれまでの議論を基にして，与えられた$0 \leq f \in L^1(\mathbb{R}_+)$に対して

$$\mu_\omega : \mathcal{M}(\mathbb{R}_+) \longrightarrow [0, \infty),$$

$$\mu_\omega(A) = \omega\text{-}\lim_x \int_0^x I_A(t) f(x-t)dt, \quad A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}_+)$$

で定義される有限加法的測度の加法性を扱う．定義よりμ_ωの性質に関わってくるのは核fと極大フィルターωである．まずは次の結果が成立する．

定理 4.1. $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$がコンパクト台を持つとする．このとき任意の$\omega \in \Omega^*$に対してμ_ωは加法性を持つ．

証明. $\mathcal{M}(\mathbb{R}_+)$の任意の減少列$\{A_i\}_{i \geq 1}$をとる．ある正数$M > 0$に対して$supp\, f \subseteq [0, M]$が成立しているとする．$X = \{x_k\}_{k=1}^\infty \in \omega$を$x_k - x_{k-1} > M$がすべての$k \geq 2$に対して成立するようなものとする．今$\omega$の減少列$X \supseteq X_1 \supseteq \cdots$を$x \in X_i$ならば

$$\left| \int_0^x I_{A_i}(t) f(x-t)dt - \mu_\omega(A_i) \right| < \frac{1}{i}$$

なるようにとる．$I_k = (x_{k-1}, x_k]$とおき，$B \in \mathcal{M}(\mathbb{R}_+)$を各$i = 1, 2, \ldots$に対して$x_k \in X_i \setminus X_{i+1}$ならば$B \cap I_k = A_i \cap I_k$と定義する．また$x_k \notin X_1$ならば$B \cap I_k = \emptyset$とする．この$B$が求める性質を持つことを示す．$\lim_{i \to \infty} \mu_\omega(A_i) = \alpha$とおき，まずは$\mu_\omega(B) = \alpha$を示す．任意の$\varepsilon > 0$に対して，$\frac{1}{i} < \varepsilon$および$\alpha - \mu_\omega(A_i) < \varepsilon$を満たすように$i \geq 1$をとる．任意の$x_k \in X_i$に対してある$j \geq i$で$x_k \in X_j \setminus X_{j+1}$となるものが存在する．このとき$B \cap I_k = A_j \cap I_k$であることに注意すると，

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{x_k} I_B(t)f(x_k-t)dt-\alpha\right| &\le \left|\int_0^{x_k} I_B(t)f(x_k-t)dt-\int_0^{x_k} I_{A_j}(t)f(x_k-t)dt\right| \\ &\quad+\left|\int_0^{x_k} I_{A_j}(t)f(x_k-t)dt-\mu_\omega(A_j)\right|+|\mu_\omega(A_j)-\alpha| \\ &=\left|\int_0^{x_k} I_{A_j}(t)f(x_k-t)dt-\mu_\omega(A_j)\right|+|\mu_\omega(A_j)-\alpha| \\ &\le \frac{1}{j}+\varepsilon\le\frac{1}{i}+\varepsilon<2\varepsilon.\end{aligned}$$

これより$\mu_\omega(B)=\alpha$が分かる．次に$\mu_\omega(A_i\setminus B)=0$が任意の$i\ge 1$について成立していることを示す．任意の$x_k\in X_i$に対して，ある$j\ge i$に対して$x_k\in X_j\setminus X_{j+1}$が成立している．このとき$B\cap I_k=A_j\cap I_k\supseteq A_i\cap I_k$より

$$\int_0^{x_k} I_{A_i\setminus B}(t)f(x_k-t)dt=0$$

が成立している．したがって$\mu_\omega(A_i\setminus B)=0$が分かる．以上により主張が示された．

次に一般に$f\in L^1(\mathbb{R}_+)$がコンパクト台を持たないケースを扱う．そのために次の結果を用いる．この定理内で使われている特異性，強特異性，および有限加法的測度の台の定義については，その証明と合わせて［4］を参照してほしい．

以下ではXを集合，$\mathcal{F}$をXのある部分集合族のなすσ-加法族とする．

定理 4.2. $\{\mu_i\}_{i\ge 1}$を$(X,\mathcal{F})$上の有限加法的測度の可算族で互いに特異なものとし，$\mu=\sum_{i\ge 1}\mu_i$が存在するものとする．各μ_iの台をS_iとおく．このときμが加法性を満たすための必要十分条件は各μ_iが加法性を満たし，かつ互いに強特異であり，さらに次が成立することである．

$$\limsup_i S_i\bigcap(\bigcup_{i\ge 1} S_i)=\emptyset.$$

ここで$\limsup_i S_i=\cap_{i\ge 1}\overline{\cup_{j\ge i}S_j}$である．

定理 4.3. $\omega\notin\mathcal{R}_-$とすると，任意の$0\le f\in L^1(\mathbb{R}_+)$に対して$\mu_\omega$は加法性を持つ．

証明. まず$n=0,1,2,\ldots$に対して補助的な有限加法的測度$\mu_{\omega,n}$を以下で定義する．

$$\mu_{\omega,n}(A)=\omega\text{-}\lim_x\int_{x-n-1}^{x-n} I_A(t)f(x-t)dt,\quad A\in\mathcal{M}(\mathbb{R}_+).$$

このとき定義より

$$\mu_\omega = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_{\omega,n}$$

が成立する．今 $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ に対して $f_n \in L^1(\mathbb{R}_+)$, $n = 0, 1, \ldots$ ．を区間 $[n, n+1]$ 上で $f_n = f$，その外側で $f_n = 0$ と定義する．これによると

$$\mu_{\omega,n}(A) = \omega\text{-}\lim_x \int_0^x I_A(t) f_n(x-t)dt, \quad A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}_+)$$

と表現できる．すると各 f_n はコンパクト台を持つから定理 4.1 より $\mu_{\omega,n}$ は加法性を持つ．すると後は定理 4.2 より各 $\mu_{\omega,n}$ の台を S_n とおいたとき，$\limsup_n S_n \cap \cup_{i=0}^{\infty} S_i = \emptyset$ を示せばよい．$\omega = (\eta, \theta)$ とおくと $\omega \notin \mathcal{R}_-$ であるから $\eta \notin \mathcal{R}_{d,-}$ であり，$X \in \eta$ で $\overline{o}_-(\eta) \setminus \{\eta\} \cap X^* = \emptyset$ を満たすものがとれる．ここで $\overline{o}_-(\eta)$ は η の負の軌道 $\{\tau^{-i}\eta : i \geq 0\}$ の閉包を表すとする．$J = \cup_{n \in X}(n + \theta - 1, n + \theta]$ と定義すると，$J \in \mathcal{M}(\mathbb{R}_+)$ は $\mu_{\omega,0}(J) = 1$ を満たし，したがって $\hat{J}$ は S_0 の近傍になっている．任意の $i > 0$ に対して，X に対する仮定より $X' \in \tau^{-i}\eta$ で $X' \cap X = \emptyset$ なるものがとれる．すると $J \cap \cup_{n \in X'}(n + \theta - 1, n + \theta] = \emptyset$ であるから，

$$\begin{aligned}
\mu_{\omega,i}(J) &= \omega\text{-}\lim_x \int_{x-i-1}^{x-i} I_J(t) f(x-t)dt \\
&= \tau^{-i}\omega\text{-}\lim_x \int_{x-1}^{x} I_J(t) f(x-t)dt \\
&\leq \limsup_{n \in X'} \int_{n+\theta-1}^{n+\theta} I_J(t) f(x-t)dt \\
&= 0.
\end{aligned}$$

したがって，$S_i \cap \hat{J} = \emptyset$ が成立する．$i > 0$ は任意であるから $\limsup_i S_i \cap S_0 = \emptyset$ であることが分かる．同様にして任意の $j \geq 0$ に対して $\limsup_i S_i \cap S_j = \emptyset$ であることが示せる．以上により $\limsup_i S_i \cap \cup_{j=0}^{\infty} S_j = \emptyset$ が分かる．

次の結果は条件付きであるが上記の定理の逆を主張している．

定理 4.4. $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ が $\mathbb{R}_+$ 上で $f > 0$ $a.e.$ を満たすとする．このとき $\omega \in \mathcal{R}_-$ ならば μ_ω は加法性を満たさない．

証明. $\omega = (\eta, \theta)$ とする．定理 4.3 の証明と同様にして各 $\mu_{\omega,n}$ の台を S_n とおいたとき，定理 4.2 より $\limsup_i S_i \cap S_0 \neq \emptyset$ を示せば十分である．$A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}_+)$ を S_0 の任意の近傍 $S_0 \subseteq \hat{A}$，すなわち $\mu_{\omega,0}(A) = \mu_{\omega,0}(\mathbb{R}_+)$ なる任意の可測集合とする．$I = [0, 1]$ とし

$L^\infty(I)$ の 列$\{I_{A,n}(x)\}_{n\geq 0}$ を$I_{A,n}(x) = I_A(x+\theta+n), x \in [0,1]$, $n = 0,1,\ldots$. で 定義する．すると$\{I_{A,n}\}_{n\geq 0}$は$L^\infty(I)$の一様有界列であるから弱*コンパクトである．したがって$\mathbb{N}_0$上の極大フィルターに関する弱*極限を考えることができる．そこで今，各$n \geq 0$に対して$\tilde{I}_{A,n}(x) = \tau^{-n}\eta\text{-}\lim_n I_{A,n}(x)$と定義する．また各$n \geq 0$に対して$\tilde{f}_n \in L^1(I)$を$\tilde{f}_n(x) = f(n+x), x \in I$とする．このとき弱*極限の定義により

$$\mu_{\omega,n}(A) = \omega\text{-}\lim_x \int_{x-n-1}^{x-n} I_A(t)f(x-t)dt = \int_0^1 \tilde{I}_{A,n+1}(1-s)\tilde{f}_n(s)ds$$

が成立している．

Aに対する仮定よりI上で$a.e.$で$\tilde{I}_{A,0}(x) = 1$が分かる．$\omega \in \mathcal{R}_-$より，$\eta \in \mathcal{R}_{d,-}$であるから$L^\infty(I)$の列$\{\tilde{I}_{A,n}(x)\}_{n\geq 0}$は$n \to \infty$のとき$\tilde{I}_{A,0}$の任意の弱*近傍に入ってくる．したがって$\mu_{\omega,0}(\mathbb{R}_+) - \varepsilon > 0$なる$\varepsilon > 0$を固定した時，$\mathbb{N}$の列$\{n_k\}_{k=1}^\infty$で

$$\int_0^1 \tilde{I}_{A,n_k+1}(t)dt > \mu_{\omega,0}(\mathbb{R}_+) - \varepsilon > 0$$

を満たすものが存在する．定義より任意の$n \geq 0$に対して$I_{A,n} \geq 0$であり，弱*極限は$L^\infty(I)$における順序を保つから$\tilde{I}_{A,n_k+1} \geq 0$が任意の$k \geq 1$に対して成立している．さらに上記より$\tilde{I}_{A,n_k+1}(x) > 0$がある測度が正の$I$の可測集合上で成立している．

仮定より$\mathbb{R}_+$上で$f > 0$ $a.e.$であるから任意の$n \geq 0$に対してI上$a.e.$で$\tilde{f}_n > 0$が成り立つ．したがって任意の$k \geq 1$に対して

$$\mu_{\omega,n_k}(A) = \int_0^1 \tilde{I}_{A,n_k+1}(1-s)\tilde{f}_{n_k}(s)ds > 0$$

となる．したがって$S_{n_k} \cap \hat{A} \neq \emptyset$がすべての$k = 1,2,\ldots$に対して成立する．よって$\limsup_i S_i \cap \hat{A} \neq \emptyset$．ここで$\hat{A}$は$S_0$の任意の近傍でよかったから$\limsup_i S_i \cap S_0 \neq \emptyset$が分かる．以上により定理が示された．

定理 4.3，4.4 を合わせると次の結果が従う．これは［3］にある密度測度に関する結果の一般化と考えられる．

定理 4.5. $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$が$\mathbb{R}_+$上で$f > 0$ $a.e.$を満たすとする．このときμ_ωが加法性を満たすための必要十分条件は$\omega \notin \mathcal{R}_-$なることである．

［参考文献］

［1］A. Basile, K. P. S. Bhaskara Rao, *Completeness of Lp -Spaces in the Finitely Ad- ditive Setting and Related Stories*, J. Math. Anal. Appl. 248 (2000), 588–624.

［2］R. C. Buck, *The measure theoretic approach to density*, Amer. J. Math. 68 (1946), 560–580.

［3］R. Kunisada, *Density measures and additive property*, J. Number Theory, 176 (2017), 184–203.

［4］R. Kunisada, *A theorem on finitely additive measures*, 学術研究（自然科学編）第 66 号（2018），1–6.

［5］D. Maharam, *Finitely additive measures on the integers*, Sankhya Ser. A 38 (1976), 44–59.